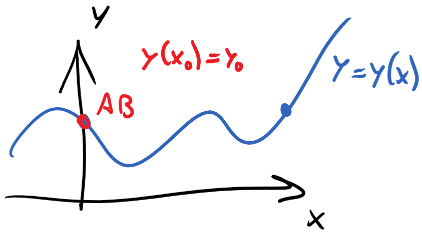
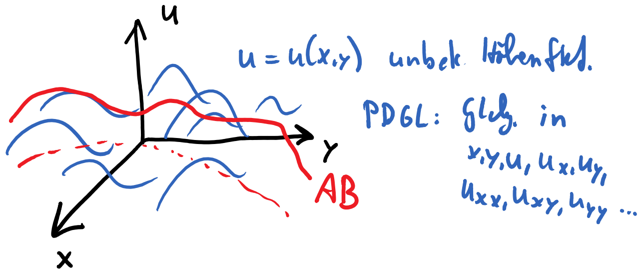
Überblick

Mittwoch, 28. April 2021 20:46



Ziel: Zurückführen auf gDGL durch geschickte Ansätze oder Transformationen



Erster Teil: PDGL 1. Ordnung (max. eine Ableitung)
Voraussetzungen: (Seite 166, 167)

- Leicht-integrierbar: $y' = f(x)$
- Linear-homogen: $y' = a(x) \cdot y$
- Trennung der Variablen: $y' = f(x) \cdot g(y)$

Zweiter Teil: PDGL 2. Ordnung (max. zwei Ableitungen)
Neue Voraussetzungen: (Seite 171)

- (homogene) lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- Selten: Euler-DGL

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Video zu diesem Kurs:
https://youtu.be/qR7QumMeCW8

Die wichtigsten Typen der gDGL 1. Ordnung

Mittwoch, 28. April 2021 20:58

Typ 0: Leicht-integrierbar: $y' = f(x)$

Beispiele:

(1) $y' = 3x^2 + 2$

$\overset{\int}{\Rightarrow} y = x^3 + 2x + c$

(2) $u_x = 4xy + 3x + y$

$\overset{\int_x}{\Rightarrow} u = 2x^2y + \frac{3}{2}x^2 + xy + c(y)$

In Int.-konst. liegt die Var., nach der <u>nicht</u> integr. wurde

Typ 1: Linear-homogen: $y' = a(x)y$

Lösungsformel:
$y' = a(x) \cdot y$
$y = c \cdot e^{\int a(x)dx}$

Beispiele:

(1) $y' = x^2 y$

lin.-hom, $a(x) = x^2$

$y = c \cdot e^{\int x^2 dx} = c \cdot e^{1/3 x^3}$

(2) $u_x = 4xy^2 u$

lin.-hom., $a(x) = 4xy^2$

$u = c(y) \cdot e^{\int 4xy^2 dx} = c(y) \cdot e^{2x^2y^2}$

Var., nach der <u>nicht</u> int. wird

(3) $y' = \cos x \cdot y$

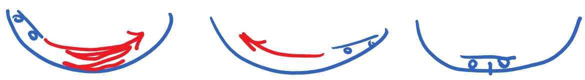
lin.-hom, $a(x) = \cos x$

$y = c \cdot e^{\int \cos x \, dx} = c \cdot e^{\sin x}$

(4) $u_y = 3xy^2 u$

lin.-hom, $a(y) = 3xy^2$

$u = c(x) \cdot e^{\int 3xy^2 dy} = c(x) \cdot e^{xy^3}$



$x(t) \equiv 0$

konst. Lsg.

Typ 2: Trennung der Variablen: $y' = f(x) \cdot g(y)$

Lösung: (Seite 166)
(1) Konstante Lösungen:
$y \equiv y_0$, wobei $g(y_0) = 0$
(2) Nichtkonstante Lösungen:

Beispiele:

(1) $y' = \frac{x^2}{y^2}, y \geq 0$

TdV, $f(x) = x^2$, $g(y) = \frac{1}{y^2}$

① Konst. Lsg.: $g(y) = \frac{1}{y^2} \overset{!}{=} 0 \rightarrow$ keine Lsg.

(1) Konst. Lsg.: $g(y) = \frac{1}{y^2} \overset{!}{=} 0 \rightarrow$ keine Lsg.

(2) nicht konst. Lsg.:

$$\int \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{y^2}}}_{=y^2} dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$y^3 = x^3 + 3c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \underbrace{3c}_{=:\tilde{c}}}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

(2) Nichtkonstante Lösungen:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx$$

(2) $y' = x \cdot \sqrt{y-2}$

TdV: $f(x) = x$, $g(y) = \sqrt{y-2}$

(1) Konst. Lsg.: $g(y) = \sqrt{y-2} \overset{!}{=} 0$

$$y - 2 = 0$$

$$y = 2$$

$\underline{y_1 \equiv 2}$

(2) Nicht konst. Lsg.:

$$\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{y-2}}}_{(y-2)^{-\frac{1}{2}}} dy = \int x\, dx$$

$$2 \cdot (y-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\sqrt{y-2} = \frac{1}{4} x^2 + \tilde{c}$$

$\tilde{c} = \frac{c}{2}$

$$y - 2 = \left(\frac{1}{4} x^2 + \tilde{c}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{1}{4} x^2 + \tilde{c}\right)^2 + 2$$

(3) $u_y = y^2 \cdot (u - x^2)$

TdV: $f(y) = y^2$, $g(u) = u - x^2$

unabh. Var., nach der int. wird

abh. Var.

(1) "konstante" Lösg.: $g(u) = u - x^2 \overset{!}{=} 0$

$\underline{u = x^2}$

(2) nicht konst. Lsg.:

$$\int \frac{1}{u - x^2} du = \int y^2 dy$$

$$\int \frac{1}{a+3} da = \ln|a+3| + c$$

$$\int \frac{1}{u-x^2}\,du = \int y^2\,dy$$

$$\int \frac{1}{a+3}\,da = \ln|a+3|+c$$

$$\ln|u-x^2| = \tfrac{1}{3}y^3 + c(x)$$

Var., nach der nicht int. wurde

$$|u-x^2| = e^{\frac{1}{3}y^3 + c(x)}$$

$$u-x^2 = \underbrace{\pm e^{c(x)}}_{=:\,\tilde{c}(x)} \cdot e^{\frac{1}{3}y^3}$$

$$\underline{u = \tilde{c}(x)\cdot e^{\frac{1}{3}y^3} + x^2}$$

Unser MW Mathe 3 Kurs

Mittwoch, 28. April 2021 21:35

2 Semester Mathe 3 im SS 2021

Vollständige Prüfungsvorbereitung (>85% der Aufgabentypen)

Einheiten á 2x90min plus Pause
Umfang: 14-17 Einheiten
(komplett beide Semester)

Kursbeitrag: 20€/Einheit ab 12 Teilnehmer