Blatt Nr.

________

# Übungsblatt: Ableitungstraining

Mit diesem Übungsblatt setzen wir unsere ersten Schritte in das Themengebiet der Differentialrechnung. Trainiert werden soll das Konzept des **Anstiegs einer Funktion**, das in der Analysis eine prägende Bedeutung hat.

Dabei verstehen wir unter dem "Anstieg" oder der "Ableitung" einer Funktion an einer Stelle den lokalen Zugewinn (oder Verlust) an y-Werten, wenn der x-Wert minimal ansteigt. Dieses Konzept des minimalen Anstiegs tritt z.B. in der Wirtschaftstheorie auf, wenn wir fragen, wie sehr sich die Kosten oder Gewinne verändern, wenn eine Einheit mehr produziert oder verkauft wird - oder in der Physik, wenn eine Länge oder ein Winkel sich minimal ändert (z.B. im Rahmen einer Schwingung oder einer Verlängerung aufgrund thermodynamischer Gründe). In allen Fällen wollen wir auf möglichst einfache Weise die Folgen dieser minimalen Änderungen für andere Werte abschätzen.

Im Folgenden soll das Konzept des Anstiegs, der Anstiegswinkel und die strukturierte Ermittlung des Anstiegs im Mittelpunkt stehen.

Deshalb setzen wir uns folgende Ziele:

- Ableitung, Anstieg, Anstiegswinkel
- Ableitungen von Elementarfunktionen
- Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
- Verknüpfungen mehrerer Ableitungsregeln
- Extras: Logarithmisches Differenzieren

### Aufgabe 1: Ableitung und Anstieg bei Elementarfunktionen

a) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Elementarfunktionen sowie den Anstieg an der genannten Stelle:

$$f_1(x) = x^2 \ , \ x_0 = 3 \qquad f_6(x) = \sin x \ , \ x_0 = 0$$
$$f_2(x) = x^5 \ , \ x_0 = -1 \qquad f_7(x) = \cos x \ , \ x_0 = \frac{\pi}{3}$$
$$f_3(x) = x^{-3} \ , \ x_0 = 2 \qquad f_8(x) = \tan x \ , \ x_0 = \pi$$
$$f_4(x) = e^x \ , \ x_0 = 0 \qquad f_9(x) = \cosh x \ , \ x_0 = \ln 2$$
$$f_5(x) = \ln x \ , \ x_0 = e^2 \qquad f_{10}(x) = \sinh x \ , \ x_0 = 0$$

b) Ermitteln Sie den Anstiegswinkel der folgenden Funktionen an den genannten Stellen. Nutzen Sie für die Winkelbestimmung lediglich die Tabellen in der Formelsammlung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ , \ x_0 = 1 \qquad g(x) = \cos x \ , \ x_0 = 0$$
$$h(x) = \sqrt{3}\arctan x \ , \ x_0 = 0 \qquad k(x) = x^{-1} \ , \ x_0 = 1$$

**Aufgabe 2: Ableitungen von Potenzfunktionen**

Eine der wichtigsten Funktionenklassen sind die Potenzfunktionen, d.h. die Funktionen $f(x) = x^p$ für $p \in \mathbb{Q}$. Widmen Sie den Ableitungen dieser Funktionen besondere Aufmerksamkeit!

a) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 3x^2$ | $f_6(x) = \frac{1}{x^2}$ | $f_{11}(x) = 3\sqrt[4]{x^5}$ |
| $f_2(x) = 6x$ | $f_7(x) = \frac{7}{2x^5}$ | $f_{12}(x) = \frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ |
| $f_3(x) = 4$ | $f_8(x) = \sqrt{x}$ | $f_{13}(x) = 4\sqrt[3]{x}$ |
| $f_4(x) = 4x^7$ | $f_9(x) = \sqrt{3x}$ | $f_{14}(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5}}$ |
| $f_5(x) = \frac{3}{x}$ | $f_{10}(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ | $f_{15}(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x^4}}$ |

b) Ermitteln Sie von den folgenden Funktionen den Anstieg an der genannten Stelle!

| | |
|---|---|
| $g_1(x) = \frac{4}{x}\ , x_0 = 2$ | $g_3(x) = 6\sqrt[3]{x},\ x_0 = 8$ |
| $g_2(x) = 2\sqrt{x}\ , x_0 = 4$ | $g_4(x) = \sqrt{\frac{2}{x}},\ x_0 = 2$ |

c) Ermitteln Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

| | |
|---|---|
| $h_1(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 5$ | $h_3(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ |
| $h_2(x) = \frac{3}{x^2} + 6x - 4$ | $h_4(x) = \frac{4}{3x} - \frac{5}{7x^2} + \sqrt[5]{2x}$ |

**Aufgabe 3: Ableitungen mit Umformungstricks**

Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen: (nur auf Basis der Grundableitungen)

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = \frac{6x^2+x}{x^3}$ | $f_5(x) = \frac{2x+x^2}{2x^3+4x^2}$ | $f_9(x) = -2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ |
| $f_2(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ | $f_6(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x}$ | $f_{10}(x) = \sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}}$ |
| $f_3(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ | $f_7(x) = \ln(x^5) + \ln(2x)$ | $f_{11}(x) = \frac{(x^2\sqrt{x}+1)}{\left(x^4\sqrt[3]{x}\right)^2}$ |
| $f_4(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ | $f_8(x) = 3\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ | $f_{12}(x) = 3\ln(x^2) - 7\ln(x^3)$ |

**Aufgabe 4: Ableitungsregeln**

a) Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels Produktregel:

$f_1(x) = x^3 \cdot \sin x$

$f_2(x) = \sqrt{x} \cdot \tan x$

$f_3(x) = (x^3 + 2x) \cdot e^x$

$f_4(x) = (x^3 + 1) \cdot (x^2 - x)$

$f_5(x) = e^x \cdot \cos x$

$f_6(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

b) Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels Quotientenregel:

$g_1(x) = \frac{x^2+5x+1}{x+3}$

$g_2(x) = \frac{x}{\sin x}$

$g_3(x) = \frac{e^x}{x^3}$

$g_4(x) = \frac{\ln(x^3)}{\ln(x)}$

c) Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mittels Kettenregel:

$h_1(x) = \cos(3x)$

$h_2(x) = e^{4x}$

$h_3(x) = \cosh(4x)$

$h_4(x) = \arctan(2x)$

$h_5(x) = \sqrt{5x + 4}$

$h_6(x) = (6 - 4x)^{10}$

$h_7(x) = \sin(x^2 + x)$

$h_8(x) = e^{4x^2}$

$h_9(x) = \log_3(2 - x)$

$h_{10}(x) = \sqrt{\sin x + \cosh x}$

$h_{11}(x) = \frac{1}{(x^2+7)^4}$

$h_{12}(x) = \arctan(x^2 - 5x)$

**Aufgabe 5: Verknüpfung mehrerer Ableitungsregeln**

Manchmal sind mehrere Ableitungsregeln notwendig, um zum Ziel zu kommen.

a) Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$f_1(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

$f_2(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

$f_3(x) = \frac{\tan(3x)}{\cos(2x)}$

$f_4(x) = \frac{x}{\ln(x^2+1)}$

$f_5(x) = x \cdot \arctan(x^2)$

$f_6(x) = \sqrt{\sin(3x - 2)}$

$f_7(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}}$

$f_8(x) = \cos\left(\sqrt{4 - x^2}\right)$

$f_9(x) = \sin^3(4x)$

$f_{10}(x) = x \cdot \cosh(2x)$

$f_{11}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$f_{12}(x) = \operatorname{arcosh}(\sqrt{e^{2x} + 1})$

b) Ermitteln Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mit logarithmischer Differentiation:

$g_1(x) = x^x$

$g_2(x) = (3x)^{x^2}$

$g_3(x) = (\cos x)^{-x}$

$g_4(x) = (\ln x)^{\ln x}$

## Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

**1. a)** $f_1'(x) = 2x, f_1'(x_0) = 6$ ; $f_2'(x) = 5x^4, f_2'(x_0) = 5$ ; $f_3'(x) = -3x^{-4}, f_3'(x_0) = -\frac{3}{16}$ ;
$f_4'(x) = e^x, f_4'(x_0) = e^0 = 1$ ; $f_5'(x) = 1/x, f_5'(x_0) = 1/e^2$ ; $f_6'(x) = \cos x, f_6'(x_0) = \cos 0 = 1$ ;
$f_7'(x) = -\sin x, f_7'(x_0) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ ; $f_8'(x) = 1/\cos^2 x, f_8'(x_0) = 1/(-1)^2 = 1$ ;
$f_9'(x) = \sinh x, f_7'(x_0) = \sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}\right) = 3/4$ ; $f_{10}'(x) = \cosh x, f_{10}'(x_0) = \cosh 0 = 1$ ;
**b)** $f'(x) = x,\ m = f'(x_0) = 1, \alpha = \arctan m = 45°$ ; $g'(x) = -\sin x,\ m = g'(x_0) = 0, \alpha = \arctan m = 0°$
$h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{1+x^2}, m = h'(x_0) = \sqrt{3}, \alpha = \arctan m = 60°$; $k'(x) = -1/x^2,\ m = k'(x_0) = -1, \alpha = \arctan m = -45°$

**2. a)** $f_1'(x) = 6x, f_2'(x) = 6, f_3'(x) = 0, f_4'(x) = 28x^6, f_5'(x) = -\frac{3}{x^2}, f_6'(x) = -\frac{2}{x^3}, f_7'(x) = -\frac{35}{2x^6}, f_8'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f_9'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}, f_{10}'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}, f_{11}'(x) = \frac{15}{4}\sqrt[4]{x}, f_{12}'(x) = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^6}}, f_{13}'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}, f_{14}'(x) = -5/\sqrt{x^7}, f_{15}'(x) = -\frac{4}{\sqrt[3]{9x^7}}$

**b)** $g_1'(x) = -\frac{4}{x^2}, m = -1$, $g_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, m = \frac{1}{2}$, $g_3'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$, $m = \frac{1}{2}$, $g_4'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x^3}}, m = -\frac{1}{4}$

**c)** $h_1'(x) = 4x^3 + 6x + 2, h_2'(x) = -\frac{6}{x^3} + 6$, $h_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$ , $h_4'(x) = -\frac{4}{3x^2} + \frac{10}{7x^3} + \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{2}{x^4}}$

**3.** $f_1'(x) = -\frac{6}{x^2} - \frac{2}{x^3}, f_2'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}, f_3'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, f_4'(x) = 1, f_5'(x) = -\frac{1}{2x^2}, f_6'(x) = -\frac{2}{x^2}$,
$f_7'(x) = \frac{6}{x}, f_8'(x) = -\frac{6}{x}$ , $f_9'(x) = -\frac{1}{x}, f_{10}'(x) = \frac{23}{8}x^{15/8}$, $f_{11}'(x) = -\frac{37}{6}x^{-43/6} - \frac{26}{3}x^{-29/3}, f_{12}'(x) = -\frac{15}{x}$

**4.a)** $f_1'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x, f_2'(x) = \frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}, f_3'(x) = (x^3 + 3x^2 + 2x + 2)e^x$,
$f_4'(x) = (x^3+1)(2x-1) + 3x^2(x^2 - x), f_5'(x) = e^x(\cos x - \sin x), f_6'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} - \frac{\arctan x}{2\sqrt{x^3}}$
**b)** $g_1'(x) = \frac{(2x+5)(x+3) - (x^2+5x+1)}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+14}{(x+3)^2}, g_2'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$,
$g_3'(x) = \frac{e^x(x^3 - 3x^2)}{x^6} = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$, $g_4'(x) = \frac{\frac{3}{x}\ln x - \frac{1}{x}\ln x^3}{\ln^2 x} = 0$ $\left(\text{oder: } g_4(x) = \frac{3\ln x}{\ln x} = 3\right)$
**c)** $h_1'(x) = -3\sin(3x), h_2'(x) = 4e^{4x}, h_3'(x) = 4\sinh(4x), h_4'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$,
$h_5'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+4}}, h_6'(x) = -40(6-4x)^9, h_7'(x) = (2x+1)\cos(x^2+x), h_8'(x) = 8xe^{4x^2}$
$h_9'(x) = -\frac{1}{\ln 3 \cdot (2-x)}, h_{10}'(x) = \frac{\cos x + \sinh x}{2\sqrt{\sin x + \cosh x}}, h_{11}'(x) = -\frac{8x}{(x^2+7)^5}, h_{12}'(x) = \frac{2x-5}{1+(x^2-5x)^2}$

**5.a)** $f_1'(x) = 2xe^{4x} + 4x^2e^{4x} = e^{4x}(2x + 4x^2)$, $f_2'(x) = -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$,
$$f_3'(x) = \frac{\left(\frac{3\cos(2x)}{\cos^2(3x)} + 2\sin(2x)\tan(3x)\right)}{\cos^2(2x)} = \frac{(3\cos(2x) + 2\sin(2x)\sin(3x)\cos(3x))}{\cos^2(2x)\cdot\cos^2(3x)},$$
$$f_4'(x) = \frac{\ln(x^2+1) - \frac{2x^2}{x^2+1}}{\ln^2(x^2+1)}, \quad f_5'(x) = \frac{2x^2}{1+x^4} + \arctan(x^2), f_6'(x) = \frac{3\cos(3x-2)}{2\sqrt{\sin(3x-2)}}$$
$$f_7'(x) = \frac{\left(3\sqrt{x^2+3x} - \frac{3x(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x}}\right)}{x^2+3x} = \frac{\left(3(x^2+3x) - \frac{3}{2}x(2x+3)\right)}{(x^2+3x)^{3/2}} = \frac{9x}{2(x^2+3x)^{3/2}} = \frac{9}{(2x+3)\sqrt{x^2+3x}},$$
$$f_8'(x) = \frac{x\cdot\sin\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}, f_9'(x) = 12\sin^2(4x)\cos(4x), f_{10}'(x) = \cosh(2x) + 2x\sinh(2x)$$
$$f_{11}'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{(1(x^2+1) - 2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x^2)}{(x^2+1)^2 + x^2} = \frac{1-x^2}{x^4+3x^2+1},$$
$$f_{12}'(x) = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x}+1)-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot 2e^{2x} = \frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{e^{-2x}+1}}\right)$$

**b)** $g_1'(x) = x^x(\ln x + 1)$, $g_2'(x) = (3x)^{x^2}(2x\ln(3x) + 2)$, $g_3'(x) = (\cos x)^{-x}(-\ln(\cos x) + x\tan x)$,
$g_4'(x) = (\ln x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{x} + \frac{1}{x\ln x}\right)$ (zugegeben, das ist wirklich ein Kraut! ☺ )