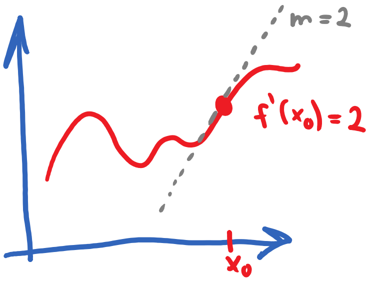
1.1. Wiederholung: Ableitungen

Mittwoch, 15. September 2021 19:00

Einordnung:

$$\text{Stammfkt. } F \xrightarrow{d/dx} \text{Funktion } f \xrightarrow{d/dx} \text{Ableitg. } f'$$

Ableitung gibt den <u>Anstieg einer Funktion</u> an, d.h.

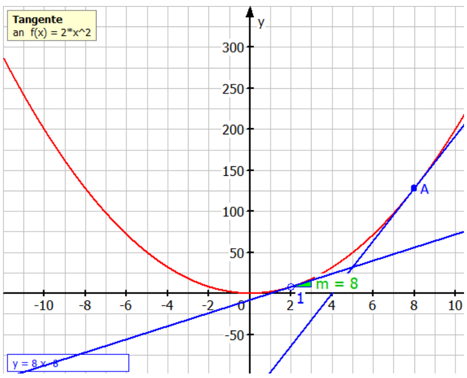


Beispiel:

(1) Bestimme den Anstieg von $f(x) = 2x^2$ an $x_0 = 2$.

$f'(x) = 4x$

$m = f'(2) = 8$

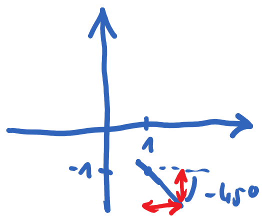


(2) Bestimme den Anstieg und den Anstiegswinkel von $f(x) = x^2 - 3x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$.

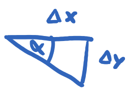
$f'(x) = 2x - 3$

$m = f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$\alpha = \arctan(m) = -45°$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$



$\alpha = \arctan(m)$

$\boxed{\tan^{-1}}$

(3) Bestimme den Anstieg und den Anstiegswinkel von $f(x) = e^{2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

$f(x) = e^{2x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

$m = f'(0) = e^0 \cdot 2 = 2$

$\alpha = \arctan(2) = 63{,}4°$

Beispiel: (Ableitungen)

(1) $f(x) = 4x^7 + 2x^3 - 2$

$f'(x) = 28x^6 + 6x^2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} = x^{-3} + 3x^{-2} - 2x^{-1}$

$f'(x) = -3x^{-4} - 6x^{-3} + 2x^{-2} = -\frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x} = x^{1/2} - 3x^{1/5}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{5}x^{-4/5}$

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a$

Tipp: $[\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

(4) $f(x) = 4\sin x + 3\cos x$

$f'(x) = 4\cos x - 3\sin x$

(5) $f(x) = 4\ln x + \tan x$

$f'(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cos^2 x = (\cos x)^2$

(6) $f(x) = \frac{x^2+4x-1}{3x}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

$= \frac{x^2}{3x} + \frac{4x}{3x} - \frac{1}{3x}$

$= \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^{-1}$

$f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^{-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x^2}$

1.2. Stammfunktionen bilden

Mittwoch, 15. September 2021 19:48

Definition:
Eine Funktion F mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f.

$x^2 \rightarrow 2x$

$x^2 - 5 \rightarrow 2x$

$x^2 + 3 \rightarrow 2x$

$x^2 + e^{\sqrt{\pi}} \rightarrow 2x$

Beobachtung: Jede Funktion hat unendlich viele Stammfunktionen, ist F eine Stammfunktion, dann auch jedes beliebige andere $F + c$.

Man schreibt daher: ("unbestimmtes Integral")

$$\int f\,dx := \text{ Menge aller Stammfunktionen von } f$$

$$[x^p]' = p \cdot x^{p-1}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c$$

Beispiele:

(1) $\int 4x + 3\,dx = \underbrace{4 \cdot \frac{1}{2}}_{2} x^2 + 3x + c, \; c \in \mathbb{R}$

(2) $\int \underbrace{(2x+2)^2}_{4x^2 + 8x + 4}\,dx = \frac{4}{3} x^3 + 4x^2 + 4x + c, \; c \in \mathbb{R}$

(3) $\int \underbrace{\frac{x^3+2x^2}{x^5}}_{\frac{x^3}{x^5} + 2\frac{x^2}{x^5} = x^{-2} + 2x^{-3}}\,dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + 2 \cdot \frac{1}{-2} x^{-2} + c = -x^{-1} - x^{-2} + c, \; c \in \mathbb{R}$

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$a^{n-m} = a^n / a^m$

Beispiele:
Bestimme diejenige Stammfunktion F von $f(x) = x^2 + 3x$, die durch den Punkt $(2; 5)$ geht.

$F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + c$

$5 = \frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + c$

$5 = \frac{8}{3} + 6 + c \qquad | -6 - \frac{8}{3}$

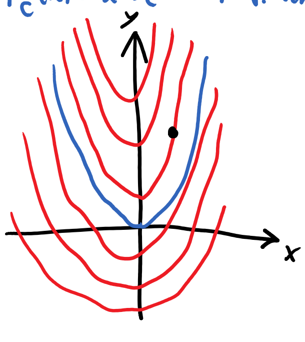
$c = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$

$\underline{F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{11}{3}}$

Bsp.:

Stammfkt. von $2x$:

$F_c(x) = x^2 + c$ Fkt.-Schar



9. Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral: $\int\left(\frac{x}{5}-a\right)dx$ **!**

Int.-Variable: x

$$\int \underbrace{\frac{x}{5}}_{\frac{1}{5}\cdot x} - a \, dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 - ax + C$$

$$= \frac{x^2}{10} - ax + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

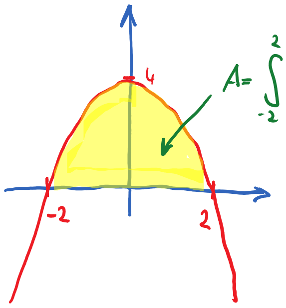
Bestimme $\int \underbrace{\frac{4x}{3}}_{\frac{4}{3}\cdot x} + bx + c \;\, dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{b}{2}x^2 + cx + k, \quad k \in \mathbb{R}$

neue Var. nehmen, da c schon genutzt

1.3. Bestimmte Integrale

Mittwoch, 22. September 2021 18:44

Ziel:
Wir wollen wissen, welcher Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x) = 4 - x^2$ und der x-Achse liegt.



$A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{32}{3}$

$4-x^2 = -x^2+4$

Grenzen: Nst. von f

$f(x) = 4-x^2 \overset{!}{=} 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Hier:

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \; dx$$

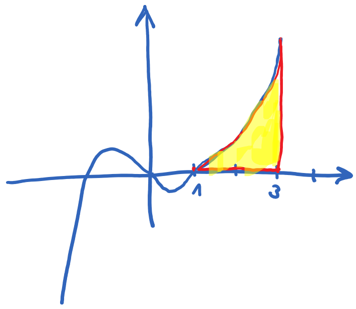
Stamm fkt. bilden

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[4 \cdot 2 - \frac{1}{3}2^3\right] - \left[4 \cdot (-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$= \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 + \frac{8}{3}\right] = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Weiteres Beispiel:
Welcher Flächeninhalt liegt zwischen Funktion $f(x) = x^3 - x$ und der x-Achse im Bereich $[1; 3]$?



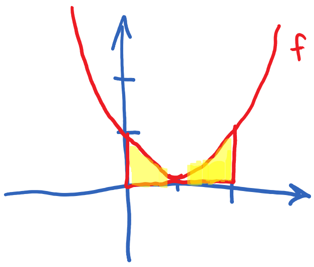
$$A = \int_{1}^{3} x^3 - x \; dx$$

TR: SSOLVE / $\int dx$ / $\boxed{FS}$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}$$

$$= \left[\frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{2}3^2\right] - \left[\frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{2}1^2\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4} - \frac{9}{2}\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{80}{4} - \frac{8}{2} = 16$$



Weiteres Beispiel:
Welcher Flächeninhalt liegt zwischen Funktion $f(x) = (x-1)^2$ und der x-Achse im Bereich $[0; 2]$?

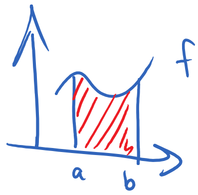
$$A = \int_0^2 \underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = \left[\tfrac{8}{3} - 4 + 2\right] - \left[0 - 0 + 0\right]$$

$$= \tfrac{8}{3} - 2 = \tfrac{2}{3}$$

Theorie: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei F Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

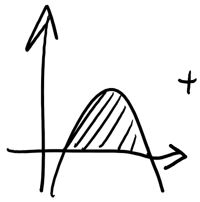


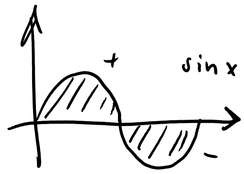
Begriffe:

$\int_a^b f(x)\,dx$ konkreter Wert, entspricht einer Art "vorzeichenbehafteter Fläche"

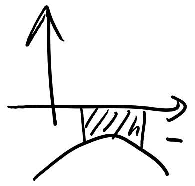
Best. Integral

⚠ Pos. + neg. Teile heben sich auf





Gesamt: 0



$\int f(x)\,dx$ Menge aller Stammfkt., +c beachten!

Unbest. Integral

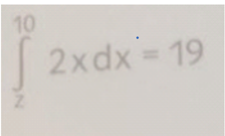
Beispiel:

(1) $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$ Wert $\hat{=}$ Fläche

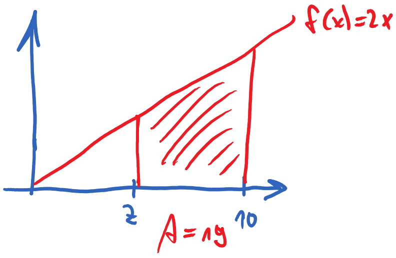
(2) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ Menge aller Stammfkt. von x^2

Beispiel:

Bestimme die Grenze z so, dass die Gleichung stimmt:



$$\int_z^{10} 2x\,dx = 19$$

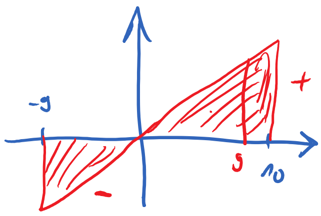


$$\int_z^{10} 2x\,dx = \left[x^2\right]_z^{10} = 10^2 - z^2 = 100 - z^2 \overset{!}{=} 19$$

$$81 = z^2$$

$z_1 = 9$

$z_2 = -9$



$z = -9$

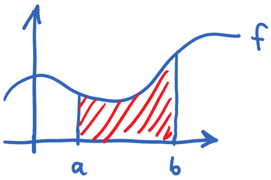
Aufgabe: "pos. Zahl z", also $z = 9$

1.4. Flächenberechnung

Mittwoch, 6. Oktober 2021 18:44

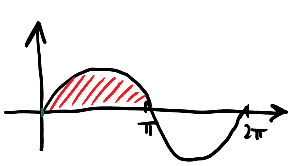
Bekannt: Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Beispiel:

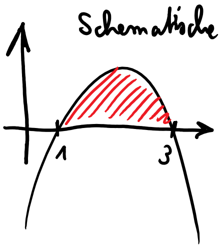
(1) Bestimme den Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = \sin x$ zwischen 0 und π mit der x-Achse einschließt!



$$A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = [-\underbrace{\cos \pi}_{=-1}] - [-\underbrace{\cos 0}_{=1}]$$
$$= 1 - (-1) = 2$$

(2) Bestimme den Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ mit der x-Achse einschließt!

Schematische Skizze:



Normalform:
$x^2 + px + q = 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

① Nst. berechnen:

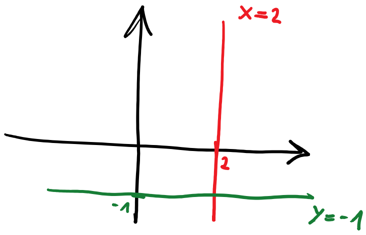
$-x^2 + 4x - 3 = 0 \quad | \cdot (-1)$
$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \boxed{p=-4,\ q=3}$
$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{(-2)^2 - 3}$
$= 2 \pm \sqrt{1}$
$= 2 \pm 1$

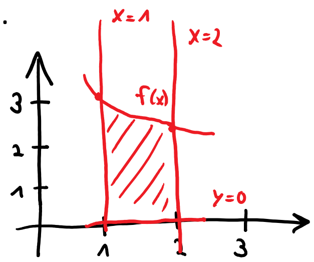
$x_1 = 3$
$x_2 = 1$

② Integral aufstellen:

$$\int_1^3 -x^2 + 4x - 3 \quad dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right]_1^3$$
$$= [\underbrace{-\tfrac{1}{3}\cdot 27}_{-9} + 2\cdot 9 - 9] - [-\tfrac{1}{3} + 2 - 3]$$
$$= 0 - \left(-\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{4}{3}$$

(3) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche, der von der Funktion $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ sowie den Geraden $x = 1, x = 2, y = 0$ begrenzt wird.



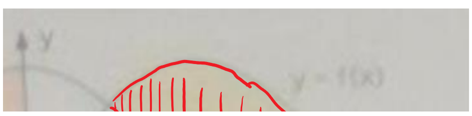


① Skizze, ggf. Hilfswerte (siehe links)

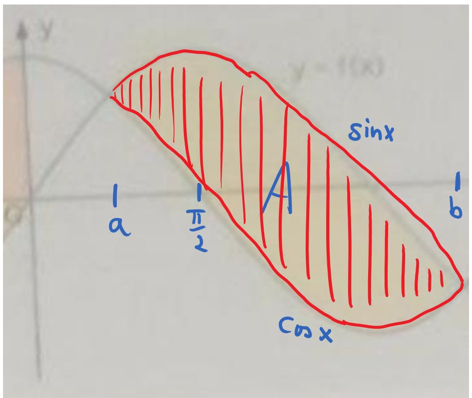
② Integral aufstellen + rechnen

$$\int_1^2 2 + \underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{x^{-2}}\, dx = \left[2x + \tfrac{1}{-1}\cdot \underbrace{x^{-1}}_{1/x}\right]_1^2$$
$$= \left[4 - \tfrac{1}{2}\right] - [2 - 1]$$
$$= 3{,}5 - 1 = 2{,}5$$

(4) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche, der von der Sinus- und der Cosinusfunktion eingeschlossen wird, wie hier dargestellt:



① Skizze, ggf. Hilfsgrößen:



(1) Skizze, ggf. Hilfsgrößen:

Streifenlänge = Differenz Fkt. Oberfkt. − Unterfkt.

$\sin x - \cos x$

Idee: $\int_a^b \sin x - \cos x \, dx$

Was ist a, b?

Schnittstellen: $\sin x = \cos x \quad | :\cos x$

$\tan x = 1 \quad | \boxed{\tan^{-1}}$ "Arcustangens"

$x_1 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x_2 = \frac{5}{4}\pi$

(2) Integral:

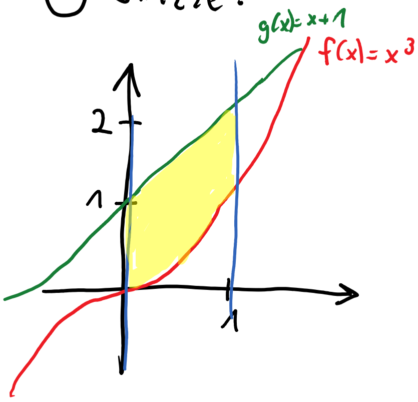
$$\int_{\pi/4}^{5/4\,\pi} \sin x - \cos x \, dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{5/4\,\pi} = \Big[\underbrace{-\cos(\tfrac{5}{4}\pi)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\sin(\tfrac{5}{4}\pi)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big] - \Big[\underbrace{-\cos(\tfrac{\pi}{4})}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4})}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \,//$$

(5) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche, die von $f(x) = x^3$ und $g(x) = x + 1$ sowie $x = 0, x = 1$ begrenzt wird.

(1) Skizze:



(2) Integral:

$$\int_0^1 \underbrace{(x+1) - (x^3)}_{x+1-x^3} \, dx$$

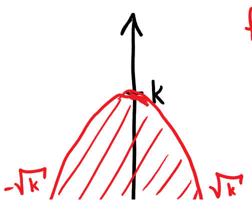
$$= \Big[\tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^1$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{4}\Big] - \Big[0 + 0 - 0\Big]$$

$$= \tfrac{5}{4} = 1{,}25$$

(6) Gegeben sei die Funktionenschar $f_k(x) = k - x^2$ $(k > 0)$. Skizziere die Fläche, die eine spezielle Funktion f_k mit der x-Achse einschließt und berechne den Flächeninhalt in Abhängigkeit des Parameters k.
Für welches $k > 0$ ist der Fläche genau 5 Flächeneinheiten groß?

(1) Skizze, ggf. Hilfspkte:



$f_k(x) = k - x^2 \stackrel{!}{=} 0$

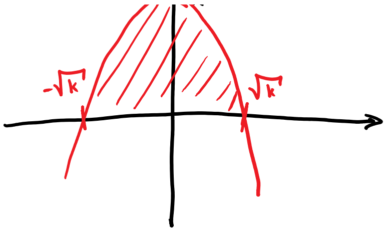
$k = x^2$

$x = \pm\sqrt{k}$

(2) Integral:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} k - x^2 \, dx = \Big[kx - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$= \Big[k\sqrt{k} - \tfrac{1}{3}\sqrt{k}^3\Big] - \Big[k \cdot (-\sqrt{k}) - \tfrac{1}{3}(-\sqrt{k})^3\Big]$$



$x = \pm\sqrt{k}$

$$= \left[\underbrace{k\sqrt{k}}_{k^1 \cdot k^{1/2} = k^{3/2}} - \frac{1}{3}\underbrace{\sqrt{k}^3}_{(k^{1/2})^3 = k^{3/2}}\right] - \left[k\cdot(-\sqrt{k}) - \frac{1}{3}(-\sqrt{k})^3\right]$$

$$= k^{3/2} - \frac{1}{3}k^{3/2} + k^{3/2} - \frac{1}{3}k^{3/2}$$

$$= k^{3/2}\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}k^{3/2}$$

5 FE: $\frac{4}{3}k^{3/2} = 5 \quad \left|\cdot \frac{3}{4}\right.$

$k^{3/2} = \frac{15}{4} \quad |\,(\cdot)^{2/3}$

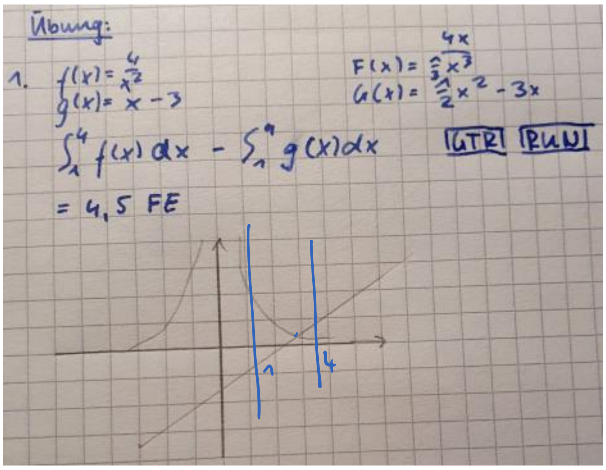
$k = \left(\frac{15}{4}\right)^{2/3} \approx 2{,}414$

1.5. Fortgeschrittene Flächeninhaltsaufgaben

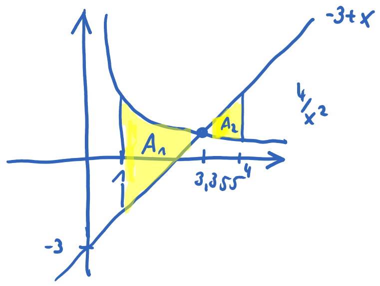
Mittwoch, 13. Oktober 2021 18:48

Beispiel:

(1) Die Funktionen $f(x) = \frac{4}{x^2}$ und $g(x) = x - 3$ sowie die Geraden $x = 1, x = 4$ schließen eine Fläche ein. Skizziere die Fläche und bestimme den Flächeninhalt.



① Skizze:



$-3 + x = \frac{4}{x^2}$

$-3x^2 + x^3 = 4$

Glg. 3ten Grades → TR

$x \approx 3{,}355$

② Integral:

$A_1 = \left| \int_1^{3,355} \frac{4}{x^2} - (x-3)\,dx \right|$

$\approx |4{,}74| = 4{,}74$

$A_2 = \left| \int_{3,355}^{4} \frac{4}{x^2} - (x-3)\,dx \right|$

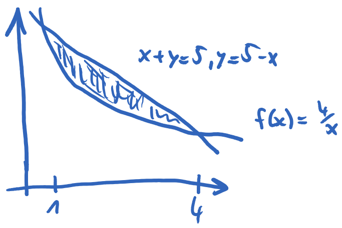
$\approx |-0{,}24|$

$= 0{,}24$

$A = A_1 + A_2 \approx 4{,}98$ //

(2) Bestimme den Flächeninhalt der von der Funktion $f(x) = \frac{4}{x}$ und der Geraden $\underbrace{x + y = 5}_{y = 5 - x}$ eingeschlossenen Fläche (ohne TR).

① Skizze



Schnittpkte: $5 - x = \frac{4}{x} \quad | \cdot x$

$5x - x^2 = 4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \underbrace{4}_{\frac{16}{4}}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{8}{2} = 4$

② Integral:

$A = \left| \int_1^4 (5-x) - \frac{4}{x}\,dx \right|$

$= \left| \left[5x - \frac{1}{2}x^2 - 4\ln|x| \right]_1^4 \right|$

$= \left| [20 - 8 - 4\ln 4] - [5 - \tfrac{1}{2} - 4\underbrace{\ln 1}_{=0}] \right|$

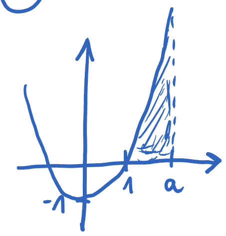
$= | 12 - 4\ln 4 - 4{,}5 |$

$= | 7{,}5 - 4\ln 4 | \approx |1{,}95| = 1{,}95$ //

(3) Bestimme ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$, sodass der Flächeninhalt der von $f(x) = x^2 - 1, y = 0,\ x = 1$ und $x = a$ eingeschlossenen Fläche genau 10 Flächeneinheiten groß ist.

① Skizze: ② Integral:

① Skizze:



② Integral:

$$\int_1^a x^2-1\,dx = \left[\tfrac13 x^3 - x\right]_1^a$$

$$= \left[\tfrac13 a^3 - a\right] - \left[\tfrac13 - 1\right]$$

$$= \tfrac13 a^3 - a + \tfrac23 \overset{!}{=} 10 \quad \Big| -\tfrac{30}{3}$$

$$\tfrac13 a^3 - a - \tfrac{28}{3} = 0 \quad |\cdot 3$$

$$a^3 - 3a - 28 = 0$$

$$\underline{a \approx 3{,}365}$$

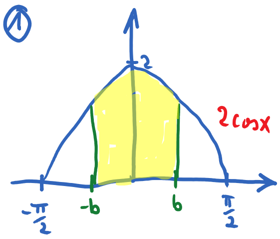
TR: EQUA

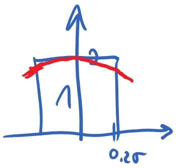
$-1{,}682 + 2{,}34\,i$
$-1{,}682 - 2{,}34\,i$ } komplex, entfallen
$3{,}365$

oder: GRAPH
$y = x^3 - 3x - 28 \rightarrow$ Nst.

(4) Bestimme ein geeignetes $b \in \mathbb{R}$, sodass der Flächeninhalt der von $g(x) = 2\cos x$, $y = 0$, $x = -b$ und $x = b$ eingeschlossenen Fläche genau 1 Flächeneinheit groß ist.

①





② $A = \int_{-b}^{b} 2\cos x\,dx$ $\quad | \sin(-x) = -\sin x$

$$= \left[2\sin x\right]_{-b}^{b}$$

$$= \left[2\sin b\right] - \left[\underbrace{2\sin(-b)}_{-2\sin(b)}\right]$$

$$= 4\sin b \overset{!}{=} 1$$

Bei diesen Aufgabentypen Bogenmaß!

$\sin b = \frac14$, $b = \arcsin(\frac14) \approx 0{,}2527$

$\boxed{\sin^{-1}}$

$14{,}478°$

(5) Die Funktion $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3$ und ihre Tangente an der Stelle $x_1 = 2$ begrenzen im ersten Quadranten gemeinsam mit den Koordinatenachsen eine Fläche. Berechne ihren Flächeninhalt.

(6) Gegeben sei die Funktionenschar $f_k(x) = kx^2 - 2k^2x + k^3$ $(k > 0)$. Jede dieser Funktionen schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Bestimme den Flächeninhalt in Abhängigkeit von k. Für welches $k > 0$ liegt der Flächeninhalt bei 27 Flächeneinheiten?